

التمرين 5/11/2016

التمرين 5/11/2016

مثال:

دالة ديفرغبلية نلاحظ أنه
 $f(x) = x^2$ بالتالي $f'(x) = 2x$
 $f'(1) = 2 > 0$ إذن f متزايدة في 1 و $f'(0) = 0$
 $f'(x) = 2x < 0$ في $x < 0$ و $f'(x) = 2x > 0$ في $x > 0$

التمرين:

دالة متزايدة، الساتر دالة ديفرغبلية تغيرها التكاملية.
 $f'(x) = 0$ (11) $f'(x) = 0$

معيار اختيار الدالة (دالة):

لكل $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ كما يمكننا تعريف الدالة f متزايدة غير معدومة. أي f متزايدة
 وليس شرطاً أن المتباينة $f(b) - f(a) \geq 0$ تكون صحيحة لكل a, b في $[a, b]$ بل فقط
 في a, b معينين.

(1) الدالة المتزايدة:

كل دالة متزايدة $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ (الدالة المتزايدة) على $[a, b]$ هي دالة
 متزايدة. أي $f(b) - f(a) \geq 0$ لكل a, b في $[a, b]$.
 الإثبات:

لكل $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ متزايدة، ونفرض أن f متزايدة وقاسم:

$$P = \{x \in [a, b] \mid f(x) - f(a) \geq 0\}$$

نلاحظ أن $a \in P$ ، ونلاحظ أن $b \in P$ ، ونلاحظ أن P متزايدة.

$$V(f) = \sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})|$$

$$V(f) = \sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})|$$

$$= f(x_1) - f(x_0) + f(x_2) - f(x_1) + \dots + f(x_n) - f(x_{n-1})$$

$$= f(x_n) - f(x_0) = f(b) - f(a)$$

بالتالي $f(b) - f(a) \geq 0$ ، وبالتالي f متزايدة.

$$V(f) = f(b) - f(a) \quad (1)$$

بما أن f متزايدة، نلاحظ أن $f(b) - f(a) \geq 0$.

$$V(f) = f(b) - f(a) \geq 0 \quad (2)$$

مثال:

الدالة $f(x) = \ln x$ على $[1, e]$ ذات قيم متغيرة الكلي:

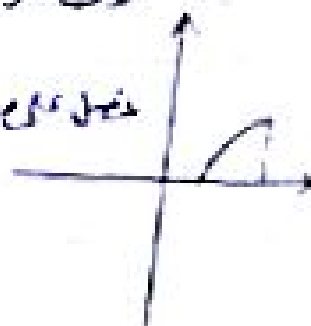
تحت مقياس متساوي:

$$V_1(f) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

مقياس على محور عددي - مقياس متساوي

مقياس كل واحد مقياس واحد



$$V_1(f) = f(e) - f(1) = 1$$

حيث الدالة متزايدة تماماً على $[1, e]$ وبالتالي لا

$$[1, e] \subset [0, \infty]$$

مثال:

الدالة $f(x) = [x]$ متزايدة على \mathbb{R} على أي فترة $[0, 2]$

تحت مقياس كلي:

$$V_1(f) = [2] - [0] = 2$$

(2) المقياس متساوي:

هذا المقياس مهم جداً.

نعتبر $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ دالة متزايدة الفترة $[a, b]$ لا عدد متناهي

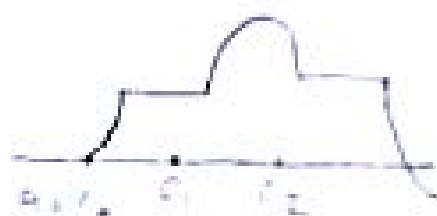
من الفترات المتناهية $[c_k, c_{k+1}]$ حيث $k = 0, 1, \dots, m$

حيث $c_0 = a$ و $c_m = b$

عندئذ تكون هذه الدالة ذات m قفلات على $[a, b]$

مكونة:

$$V_1(f) = \sum_{k=0}^{m-1} V_{[c_k, c_{k+1}]}(f)$$

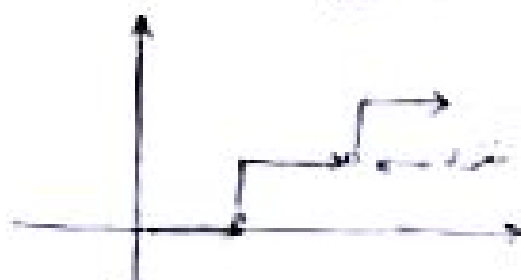


$$= V_{[a, c_0]}(f) + V_{[c_0, c_1]}(f) + \dots + V_{[c_{m-1}, b]}(f) \quad (3)$$

مثال متطرفة:

مربعاً متساوي الساقين $f(x) = \sin x$ $x \in [0, 2\pi]$ f دالة
 (تسمى دالة f متساوية الساقين في $[a, b]$ إذا كانت $f(a) = f(b)$)

نلاحظ هنا أن الدالة f متساوية الساقين في $[0, 2\pi]$ لأن $f(0) = f(2\pi) = 0$.
 نلاحظ أيضاً أن الدالة f متساوية الساقين في $[0, \pi]$ لأن $f(0) = f(\pi) = 0$.
 نلاحظ أيضاً أن الدالة f متساوية الساقين في $[\pi, 2\pi]$ لأن $f(\pi) = f(2\pi) = 0$.



افانما $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ دالة متساوية الساقين في $[a, b]$ فإنها متساوية الساقين في $[a, c]$ و $[c, b]$ لأي $c \in (a, b)$.

نلاحظ هنا أن الدالة f متساوية الساقين في $[0, \pi]$ و $[\pi, 2\pi]$ لأن $f(0) = f(\pi) = 0$ و $f(\pi) = f(2\pi) = 0$.

نلاحظ أيضاً أن الدالة f متساوية الساقين في $[0, \pi]$ و $[\pi, 2\pi]$ لأن $f(0) = f(\pi) = 0$ و $f(\pi) = f(2\pi) = 0$.
 نلاحظ أيضاً أن الدالة f متساوية الساقين في $[0, \pi]$ و $[\pi, 2\pi]$ لأن $f(0) = f(\pi) = 0$ و $f(\pi) = f(2\pi) = 0$.

نلاحظ أيضاً أن الدالة f متساوية الساقين في $[0, \pi]$ و $[\pi, 2\pi]$ لأن $f(0) = f(\pi) = 0$ و $f(\pi) = f(2\pi) = 0$.

نلاحظ أيضاً أن الدالة f متساوية الساقين في $[0, \pi]$ و $[\pi, 2\pi]$ لأن $f(0) = f(\pi) = 0$ و $f(\pi) = f(2\pi) = 0$.

$$V(f) = \sum_{k=1}^n |f(c_k) - f(c_{k-1})|$$

نلاحظ هنا أن الدالة f متساوية الساقين في $[0, \pi]$ و $[\pi, 2\pi]$ لأن $f(0) = f(\pi) = 0$ و $f(\pi) = f(2\pi) = 0$.

$$V(f) = |f(c_1) - f(a)| + \sum_{k=2}^n |f(c_k) - f(c_{k-1})| + |f(b) - f(c_n)| \quad (4)$$

$$f(a) = f(a) \quad f(b) = f(b)$$

$$V(f) = \sum_{k=1}^n |f(c_k) - f(c_{k-1})|$$

مع حساب الجداول المباشرة تقدم كل كود و ماعدا المرفقة مع الدالة
(٢١٢) لا
مع المتعالي ٢٠٠ دولارها وسجلها منه فاعل بالمرافقة بالمرافقة.

ثانيًا للمعاملة الأولى (المصفحات العارضة):

المصفحات:

عند دراسة الدالة نتعلم بالذات من الجسيم للدالة المستمرة على الفترة I (تحتسب من غير حدود) كما نقول: $a < x_0 < b$

نقطة

وندرس في الزمر $f(x_0 + 0)$ ونكتب:

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0)$$

نقطة التقارب من الجسيم

أو x_0 الدالة عند x_0 من الجسيم.

كما ونعلم بالذات من الجسيم كما نقول: x_0 و $f(x_0 - 0)$

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0)$$

منه تعلم عند النقطة x_0 من الجسيم عند x_0 بالذات من الجسيم.

نقاط التقارب من الجسيم في الدالة:

نقول (من الدالة) f تعاقب من الدالة من الجسيم في الدالة x_0 إذا وجدت

المصفحات من الجسيم من الجسيم من الجسيم:

$$f(x_0 + 0) \neq f(x_0 - 0)$$

أما النقطة عند النقطة x_0 حيث $a < x_0 < b$ هو الجسيم $f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0)$

وإذا كان هذا العدد x_0 يصبح الدالة مستمرة عندها من الجسيم عند x_0

والنقطة x_0 حيث $a < x_0 < b$ هو الجسيم من الجسيم.

$$f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0) \quad (4)$$

مثال:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

إذا افترضنا $g(x) \neq 1$ تصبح x نقطة انتقال في الدالة g في الدالة g

في

منه تعلم عند النقطة من الجسيم عند النقطة x_0 من الجسيم

$$f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0)$$

نصفية -
الانقطاع من النوع يقول x_0 $(a \leq x_0 \leq b)$ يعني انه نقطة
عدد محدود .

مبرهنة (1) :

تساوي انقطاع الدالة المتصلة المعروفة في $[a, b]$ هي مجموعة النوع 1، نزل
مبرهنة (2) :

مجموعة تساوي انقطاع الدالة المتصلة f في $[a, b]$ هي مجموعة منتهية
او معدومة (عددها لم تذكر أية منتهية او معدومة) .

مثال :

$$y = [x] \quad x \in [0, 2]$$

تساوي انقطاع عددها = 2 ، لذلك -

$$f(1+) - f(1-) = 1 - 0 .$$

- ما قاله انقطاع التساوي - x_1, x_2, \dots هي نقطة $[a, b]$ منها على f

$$[f(a+) - f(a)] + \sum_{k=1}^n [f(x_k+) - f(x_k-)]$$

(*)

$$+ [f(b) - f(b-)] \leq f(b) - f(a)$$

ما قاله كانت في حالة خاصية مجموع تساوي انقطاع تساوي اول مجموعة منتهية

x_1, \dots, x_n تساوي اختيارية من الفترة (a, b) يكونه .

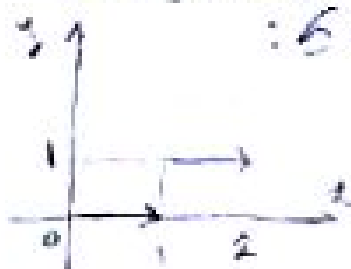
نفس السامر فقط المجموعه من a الى b (**)

مثال :

لنأخذ هنا $[x] = [x]$ و $0 \leq x \leq 2$ ولنعرفها على الفترة $[0, 2]$

كما نعلم في متسلسلة واحدة الفترة مغطى بالياك :

$$[x] = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & 1 \leq x < 2 \\ 2 & x = 2 \end{cases}$$



ذلك فانه تساوي انقطاع داخل الفترة $(0, 2)$

هي الفترة الوحيدة $x = 1$ اضعف، الفترة $x = 0$ لا تكون نقطة انقطاع

وهذه هي الفترة المطلوبة $\Rightarrow 0$ أما النقطة $x=2$ فنقلنا ϵ منه لبار

فقط . ولتقدم لقبه على حساب : $(*)$
 $[f(0+\epsilon) - f(0)] + [f(1+\epsilon) - f(1-\epsilon)]$

$$+ [f(2) - f(2-\epsilon)] \stackrel{(*)}{\leq} f(2) - f(0) .$$

$$= 0 + 1 + 2 - 1 = 2 \leq 2 .$$

المرتب .

المات [x] الدية تلك فترة $\epsilon = 1$ الصغر من كل عدد موجب ألي
 3 . هناك ϵ صحيح وليس 2

نعود للمعاملة السابقة :

دالة خطية :
إذا كانت الدالة مطروقة لأي قيمة غير معدومة، $[a, b]$ مثلاً
منه إذا كانت دالة جبرية $[B, a] \supset [a, b]$ يكون
مبدأ سميح الدالة تحت f بشرط أنه تكون الدالة معدومة في تلك الفترة

كما مررنا في هذا :

$$V_a^b(f) = \sup_{B < b} V_a^B(f) = \sup_{B < b} |f(B) - f(a)|$$

$$= |f(b) - f(a)| = f(b) - f(a)$$
 أي : $f(b) - f(a)$
 وهذا ما نسميه بالقيمة التفاضلية في الفترة $[a, b]$

والآن نقول :
 يلزمنا هذا الفرض من الدوال فكيف نعرف الدالة تحت f عندئذ نسمي الدالة
 - تكون $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ دالة تحت f في $[a, b]$ عندئذ نسمي الدالة
 المتكاملة على الفترة التالية :

$$V_a^b(f) = \int_a^b f(x) dx$$

دالة التغير (ليس التغير) للدالة f وهي تعطي التغير الدالة f
 على الفترة $[a, b]$

ملاحظة : (مبدأ دالة التغير)
 إذا كانت f دالة تحت f على $[a, b]$ فانه لدالة التغير
 $V_f(t) = f(t)$ (بالتغير t)

الخاصة التالية :
 $|f(t)| \leq V_a^b(f)$
 (1) محدودة على $[a, b]$ أي :
 يوجد التغير الدالة محدود

(2) تنزلية على $[a, b]$ أي :
 $V_f(t_1) \leq V_f(t_2)$ ، $a \leq t_1 \leq t_2 \leq b$

(P_1) د.ت.م على $[0, b]$ لوقت تقارب، على $[a, b]$ حسب (P_2) .

$$\int_a^b (V_f) = \int_a^b (f)$$

على صفة:

ملاحظة:

$$V_f(x) = f(x)$$

د.ت.م تقارب على $[0, b]$.
 (P_4) يلزم ويكون للكون دالة المتغير مستمرة في نقطة x من $[a, b]$ هذه ان تكون الدالة مستمرة في نقطة x و x نفسها.

مثال: $f(x) = x^2$

أوجد دالة المتغير لذلك $f(x) = x^2$ على الفترة $[0, 3]$.
 ثم أوجد تغيرها التالي على هذه الفترة.

الحل:

مبدأ الحل هو تبسيط الخوارزمية:

1) نكتب أنه إذا f د.ت.م على $[0, 3]$.

فإن f دالة متزايدة تماماً على $[0, 3]$ وبالتالي فهي تقارب

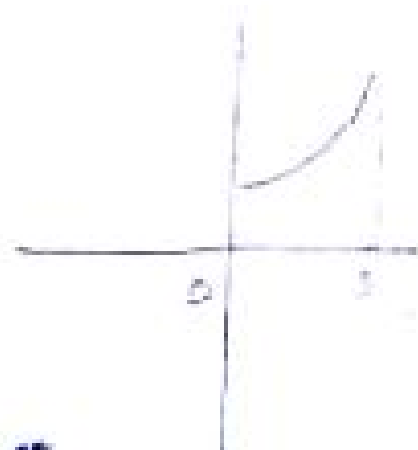
تماماً على الفترة المغلقة $[0, 3]$ لكل $0 \leq x \leq 3$ ولذا يمكننا

نكتب f د.ت.م على $[0, 3]$.

عندما نبدأ حل أية تغير P

الفترة $[0, 3]$ تكون لدينا f

تقارباً تاماً:



$$V(f; P) = \sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})|$$

$$= f(x) - f(0) = f(x) - 1$$

$$= x^2 + 1 - 1 = x^2$$

(تقارباً تاماً)

(3) نأخذ التغير التكاملي للمجموع بساكنة .

$$V_0^x(g) = \sup \{ \sum_{i=1}^n x_i^2 ; P \in \mathcal{P}_{[0,3]} \}$$

فدالة $V_0^x(g)$ تكون دالة التغير هي

$$V_0^x(x) = \begin{cases} x^2 & 0 \leq x \leq 3 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

وهذه كالتحيم $x \in [0, 3]$ مع الملاحظة أنه
 عند تغير القيمة التغير التكاملي لدالة التغير $[0, 3]$
 لدالة V_0^x هي:

لأنه متزايدة

$$V_0^x(V_0^x) = 3^2 - 0^2 = 9$$

$$= V_0^x(g)$$

 وهذا يأمور الملاحظة السابقة
 في النهاية

أو هذا التغير للدوال:

$f(x) = \sqrt{x} \quad 1 \leq x \leq 5$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & 0 \leq x < 1 \\ 5 & x = 1 \\ x+3 & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

(4) يلزم مبرهن:

لنكن الدالة f هي $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ذات قيم عليا إذا و فقط إذا
 وجدت دالة F متزايدة ومحدودة على نفس الفترة ونكتب
 المتطابقة: $|f(x_2) - f(x_1)| \leq F(x_2) - F(x_1)$ $a \leq x_1 < x_2 \leq b$

مطلوب من الكتاب.

(5) كتاب الدالة المتزايدة

